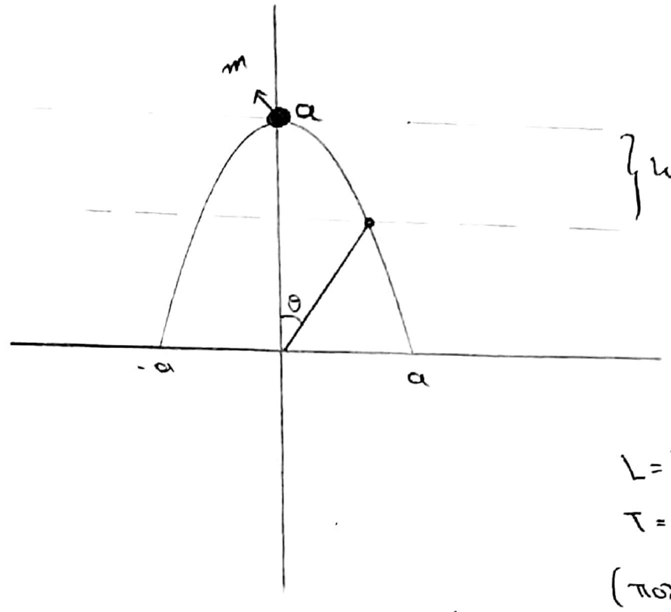
Μάθημα 19 14/5/2018

Κλασσική

Άσκηση 1

Σωματίδιο μάζας m ξεκινά από ηρεμία στη κορυφή ημικυκλίου ακτίνας a. Να βρεθεί η γωνία στην οποία το σωματίδιο εγκαταλείπει το ημικύκλιο



$h = r\cos\theta$

$L = T - V$

$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$

(πολικές συντεταγμένες)

$V = mgr\cos\theta$

$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - mgr\cos\theta$

Έχουμε συνθήκη: $g = r - a = 0$

Θέλω να βελτιστοποιήσω την Lagrange βάση συνθήκης

Εδώ έχω κίνηση υπό περιορισμό. Οι μεταβλητές του συστήματος είναι η ακτίνα r και η γωνία θ. Τότε οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$(\Sigma)\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial r} - \dfrac{\partial}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \lambda\cdot\dfrac{\partial g}{\partial r} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \theta} - \dfrac{\partial}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \lambda\cdot\dfrac{\partial g}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

όπου $x = r$
όπου $y = \theta$

▸ Έχω τις 2 εξισώσεις και θυμάμαι επιπλέον ότι $r = a$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{1}{2} m 2r\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta} = mg\sin\theta \qquad \frac{\partial g}{\partial r} = 1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{1}{2} m 2\dot{r} \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} m r^2 2\dot{\theta} \qquad \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0$$

▸ Να κάνω στο (Σ) τις αντικαταστάσεις μαζί

Μετα τις αντικαταστασεις εχω

$$\begin{cases} m a \dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + \lambda = 0 & (3) \\ mg a \sin\theta - m a^2 \ddot{\theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

και εχω ενα συστημα Δ.Ε με αγνωστους το θ και το λ.

- Ζητω το ποτε εγκαταλειπω το κυκλο
- Αν το εχω κανει ολα σωστα τοτε το συστημα πρεπει να ειναι συνεπες.
- max (παραγωγος) = 2
  min (παραγωγος) = 0

$$\begin{cases} a\ddot{\theta} - \sin\theta = 0 & (1) \\ m a \dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + \lambda = 0 \end{cases}$$

Πολλ/ζω την (1) με $\dot{\theta}$ και εχω

$$a\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \cos\theta = C_1 \quad (2)$$

και
$$\begin{cases} t = 0 \\ \theta(0) = 0, \ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases}$$

Αρα απο (2) το $\boxed{C_1 = 1}$

οποτε $\frac{a}{2}\dot{\theta}^2 + g\cos\theta = g \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a}(1-\cos\theta)$ απο αυτη θα βρω το θ.

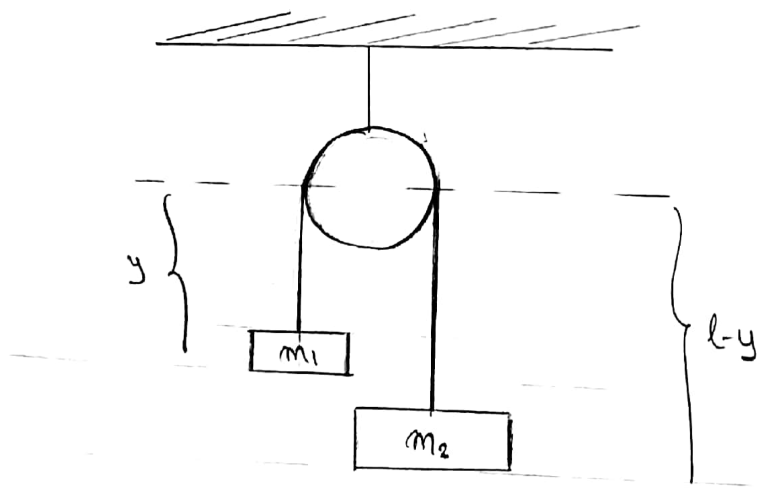
Αντικαθιστω στη (3)

$$m a \frac{2g}{a}(1-\cos\theta) - mg\cos\theta + \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = mg(3\cos\theta - 2)}$$

Εγκαταλειπω το κυκλο οταν $\lambda = 0$ δηλ οταν $\cos\theta = 2/3$

Παραδειγμα 1.

Η μηχανη του Atwood



Lagrange: $L = T - V$

l: σταθερα

$$T = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{y}^2$$

$$V = m_1 g y + m_2 g (l-y)$$

Αρα $L = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{y}^2 - m_1 g y - m_2 g (l-y)$

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0 \Rightarrow$$

$$-m_1 g + m_2 g - \frac{d}{dt}\frac{1}{2}(m_1+m_2)2\dot{y} = 0 \Rightarrow$$

$$(m_1+m_2)\ddot{y} = g(m_2-m_1) \Rightarrow$$

$$\boxed{\ddot{y} = g \cdot \frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}}$$

▲ Στη θέση y έχω μάζα και στη θέση $l-y$ έχω επίσης μάζα

$$\ddot{y} = g\,\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}$$ Βρήκα τη κίνηση του κέντρου μάζας

Σύνδεση με το Νόμο του Νεύτωνα

Σε ένα πεδίο δυνάμεων, οι δυνάμεις προέρχονται από το δυναμικό $V=V(x,y,z)$ (συντηρητικό πεδίο), η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι $T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$

Τότε το $L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-V(x,y,z)$ είναι η εξίσωση Lagrange

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=0 \\ \frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}=0 \end{cases} \Rightarrow \quad -\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}m2\dot{x}=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} m\ddot{x}=-\frac{\partial V}{\partial x}=F_x \\ m\ddot{y}=-\frac{\partial V}{\partial y}=F_y \\ m\ddot{z}=-\frac{\partial V}{\partial z}=F_z \end{matrix}\right\} \text{Νόμος Νεύτωνα}$$

• Χρειάζομαι μόνο το L για να βρω την εξίσωση κίνησης (δηλ. μόνο το τύπο να βρω (βγάζω)) και όχι για να τη λύσω. Για την λύση έχω 3 Δ.Ε να λύσω

▶ Η γενίκευση ορμής και ενέργειας

Ο δυναμικός νόμος του Νεύτωνα $\vec{F}=m\vec{a}$ με την εφαρμογή της αρχής του Hamilton γενικεύεται στις εξισώσεις Lagrange $\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=0$, $L=L(q,\dot{q},t)$

Αν περιγράψουμε τη θέση του σώματος σε καρτεσιανές συντεταγμένες και ορίσουμε P_i την ορμή που αντιστοιχεί στη συντεταγμένη x_i, όπου

$$\begin{cases} x_1=x, & P_1=P_x \\ x_2=y, & P_2=P_y \\ x_3=z, & P_3=P_z \end{cases}$$

Τότε μπορούμε να ορίσουμε

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial q_i}=m\ddot{x}_i \\ \frac{\partial L}{\partial q_i}=F_i \end{cases}$$ ώστε τελικά $$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \iff m\ddot{x}_i=F_i$$

Στην περίπτωση που η μάζα είναι $m=m(t)$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}_i)=\frac{dp_i}{dt}=F_i$$

Ορισμός
Ορίζουμε για κάθε συντεταγμένη q_i του φυσικού συστήματος την αντίστοιχη γενικευμένη ορμή ως:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

και η ποσότητα $F_i = \frac{\partial L}{\partial q}$ είναι η γενικευμένη δύναμη.

Με το τρόπο αυτό δε γενικεύεται μόνο ο 2ος νόμος του Νεύτωνα γιατί αποκτά ισχύ σε κάθε σύστημα συντεταγμένων αλλά γενικεύονται και τα αντίστοιχα φυσικά μεγέθη, η ορμή και η δύναμη.
Κατά τον ίδιο τρόπο γενικεύουμε και την έννοια της ενέργειας. Εισάγουμε τη ποσότητα

$$E = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L(q, \dot{q}, t) \quad [= H]$$

που ονομάζεται ολοκλήρωμα Jacobi ή χαμιλτονιανή και είναι η γενίκευση της ενέργειας.
↳ είναι ανεξάρτητη του χρόνου (διατηρείται)

▲ Στα συστήματα που εμείς μελετάμε η συνάρτηση Lagrange δεν έχει άμεση εξάρτηση από το χρόνο δηλ $L = L(q, \dot{q})$

Γενικά $L = L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - V(q_1, q_2, q_3)$

Τότε

$$\frac{dE}{dt} = \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{dL}{dt}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Δηλαδή $\frac{dE}{dt} = \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i} - \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = \dot{q}_i \left[- \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)}_{\text{Εξίσωση Euler}} \right] = 0}$$

Πρωτα ολοκληρωματα

Η διαφορικη εξισωση Euler ειναι $2^{ης}$ ταξης και η λυση της περιεχει δυο αυθαιρετες σταθερες.

Σε ειδικες περιπτωσεις η εξ. Lagrange ειναι ανεξαρτητη απο τις μεταβλητες $(t, q, \dot{q})$ και οπα η εξ. Euler απλοποιειται αμεσα

Θεωρουμε τις περιπτωσεις:

1. $L = L(q, t)$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ (αλγεβρικη εξισωση)
2. $L = L(\dot{q}, t)$, $\frac{\partial L}{\partial q} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = C$ (αλγεβρικη εξ.)
3. $L = L(q, \dot{q})$, διατηρειται η ποσοτητα $E = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L$

Οι ποσοτητες $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = C$ και $E = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L$ ονομαζονται ολοκληρωματα κινησης ή πρωτα ολοκληρωματα

- Γενικα οριζουμε ως πρωτο ολοκληρωμα μιας Δ.Ε της μορφης $F(x, y, y', y'') = 0$ $\;(y'' + y = 0)$ τη συναρτηση $g = g(x, y, y')$ που παραμενει σταθερη στο χρονο αν y ειναι λυση της F

$$\boxed{\text{Η } g = g(x, y, y'') = \frac{(y')^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \text{ ειναι σταθερη στο χρονο}}$$

Με συμφερει να λυσω τη g απο το να λυσω την F